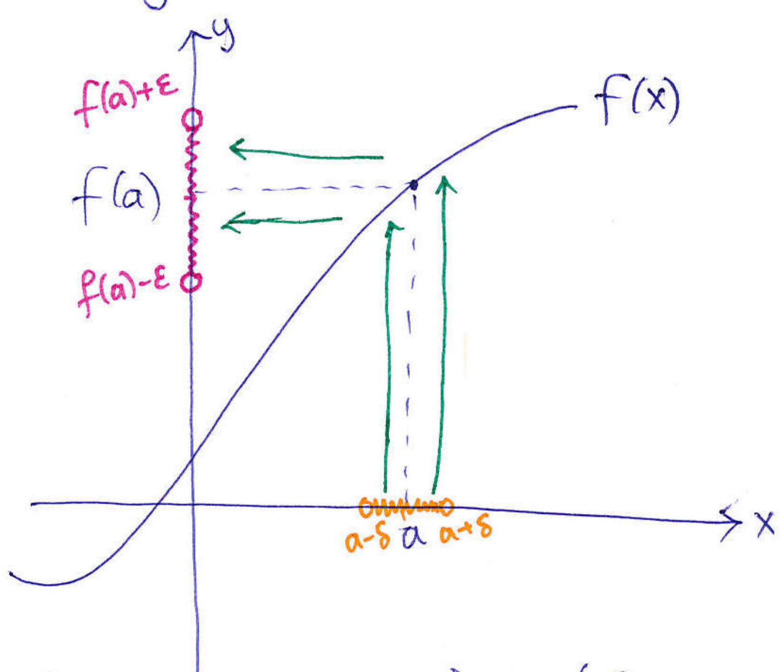
3. SÜREKLİLİK

3.1. Temel tanımlar ve Sonuçlar

$X \subset \mathbb{R}$, $f: X \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $a \in X$ olsun. $\delta > 0$ olmak üzere $x \in U_\delta(a)$ değişkeninin aldığı değerler a noktasına yeteri kadar yakın olduğunda $f(x)$ fonksiyon değeride $f(a)$ değerine çok yakın durursa yani $x \to a$ iken $f(x) \to f(a)$ ise f'ye a noktasında süreklidir, denir.

Tanım 3.1.1. $X \neq \emptyset$, $f: X \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $a \in X$ olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ sayısı için $|x-a| < \delta$ olduğunda $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ o.ş. $\exists \delta : \delta(\varepsilon) > 0$ varsa f fonksiyonuna $a \in X$ noktasında süreklidir, denir.

Bu tanıma göre



Verilen her $\varepsilon > 0$ sayısı için $(f(a)-\varepsilon, f(a)+\varepsilon)$ komşuluğu oluştuğunda a'nın öyle bir $(a-\delta, a+\delta)$ komşuluğu bulunmalıdır ki $\forall x \in (a-\delta, a+\delta)$ için $f(x) \in U_\varepsilon(f(a))$ olsun.

NOT: $f: X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu X-in her noktasında sürekli ise f'ye X-de süreklidir, denir.

NOT: Limit ile süreklilik dikkate alınırsa; limit alabilmek için a noktası yığılma noktası olması gerekirken $a \in D_f$ olmak zorunda değildi. Fakat süreklilik için a bir yığılma noktası ve $a \in D_f$ olmalıdır.

UYARI: Bir f fonksiyonu tanım kümesinin her noktasında sürekli olmayabilir. f'nin tanım kümesinde sürekli olduğu noktalar kümesi S_f olup $S_f \subseteq D_f$ dir.

NOT: $f: X \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun $a \in X$ noktasında sürekli olması demek $f(a)$ var, $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ var ve $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ olması demektir.

Tanım 3.1.2: $X \subset \mathbb{R}$, $f: X \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $a \in X$ olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $(x_n) \in X$ ve $x_n \to a$ koşulunu sağlayan her (x_n) dizisi için $f(x_n) \to f(a)$ ise f'ye a noktasında Heyne'ye göre süreklidir yada dizisel süreklidir, denir

Daha önce limit konusunda Cauchy'ye göre limit ile Heyne göre limitin denk olduğu ispatlanmıştı. Buna göre Cauchy'ye göre süreklilik ile Heyne göre süreklilik de denktir.

UYARI: $X \subset \mathbb{R}$, $f: X \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $a \in X$ olsun. a bir ayrık (izole) nokta ise f fonksiyonu a noktasında süreklidir.

Çünkü $a \in X$ ve $a \notin X'$ ise $\exists \delta > 0$ için $U_\delta(a) = \{a\}$ olur. O zaman $\forall \varepsilon > 0$ için $x \in U_\delta(a)$ olduğunda $|f(x) - f(a)| = |f(a) - f(a)| = 0 < \varepsilon$ olur.

Örneğin $f: (-3,2] \cup \{4,5\} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu ve kuralı ne olursa olsun f fonksiyonu $x=4$ ve $x=5$ noktalarında süreklidir. Ayrıca $X = (-3,2] \cup \{4,5\}$ için $X' = [-3,2]$ olduğunu hatırlayalım.

Tanım 3.1.3: $X \subset \mathbb{R}$, $f: X \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $a \in X$ noktası verilsin. Eğer f fonksiyonu a noktasında sürekli değilse f'ye a noktasında süreksizdir, denir.

UYARI: Sürekli bir fonksiyonun grafiği elimizi kaldırmadan çizebileceğimiz bir grafik olarakda söylenebilir. Grafikte atlama veya delik olan noktalar süreksizlik anlamında şüphe uyandırır.

NOT: Bu tanıma göre $f: X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $a \in X$ noktasında süreksizdir $\iff$ $\exists \varepsilon > 0$ sayısı için her $\delta > 0$ alındığında $|x-a| < \delta$ iken $|f(x) - f(a)| \geq \varepsilon$ o.ş. $\exists x \in X$ vardır.

Tanım 3.1.4: $X \subset \mathbb{R}$, $f: X \to \mathbb{R}$ bir fonk. ve $a \in X$ olsun. Eğer

$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a^+) = f(a)$ ise f'ye a'da sağdan sürekli,

$\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a^-) = f(a)$ ise f'ye a'da soldan sürekli

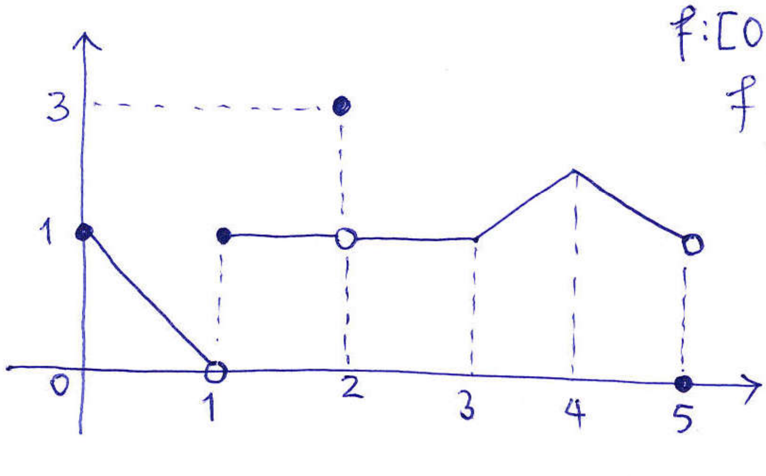
denir. Bu tanıma göre f, $x = a$ noktasında süreklidir $\Leftrightarrow f(a^+) = f(a^-) = f(a)$ dir.

ÖR: $f(x) = [\![x]\!]$ ve $a = 2$ olsun.

$f(2) = 2$, $f(2^+) = 2$, $f(2^-) = 1$ olup f fonksiyonu $a = 2$ noktasında süreksiz olmasına rağmen sağdan süreklidir.

NOT: Bir f fonksiyonu için $D_f = [a, b]$ şeklinde bir aralık ise uç noktalardaki süreklilik için a noktasında sağdan, b noktasında soldan sürekliliğe bakmak yeterlidir.

ÖR:



$f: [0,5] \to \mathbb{R}$ için f fonksiyonu $[0,1) \cup (1,2) \cup (2,5)$ aralığında süreklidir. $x=1$, $x=2$, $x=5$ noktalarında süreksizdir.

UYARI: $f(x)$ ve $g(x)$ iki polinom tipli fonksiyon ise $\forall a \in \mathbb{R}$ için $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ ve $\lim_{x \to a} g(x) = g(a)$ olduğunu biliyoruz.

Yani polinom tipli fonksiyonlar $\mathbb{R}$-de süreklidirler.

ÖR: $f(x) = \frac{x^3+2x^2-1}{x-1}$ fonksiyonu bir tam rasyonel fonk.

olup $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ old. dan D_f-de süreklidir. Yani $\forall p \in D_f$ için

$$\lim_{x \to p} \frac{x^3+2x^2-1}{x-1} = \frac{p^3+2p^2-1}{p-1} \text{ dir.}$$

ÖR: $f(x) = \operatorname{Sgn}(x)$ fonksiyonu $x=0$ noktasında süreksizdir. Çünkü $f(0)=0$, $f(0^+)=1$, $f(0^-)=-1$ dir.

ÖR: $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ fonksiyonu $x=0$ noktasında

süreksizdir. Çünkü Heyne göre $x=0$'a yakınsayan iki dizi $(a_n) = \frac{1}{n}$ ve $(b_n) = \frac{\sqrt{2}}{n}$ için $a_n, b_n \longrightarrow 0$ iken

$$f(a_n) = f\left(\frac{1}{n}\right) = \{1, 1, 1, \dots\} \longrightarrow 1$$

$$f(b_n) = f\left(\frac{\sqrt{2}}{n}\right) = \{0, 0, 0, \dots\} \longrightarrow 0$$ olup $f(a_n)$ ve

$f(b_n)$ aynı eleman olan $f(0)=1$'e yakınsamaz.

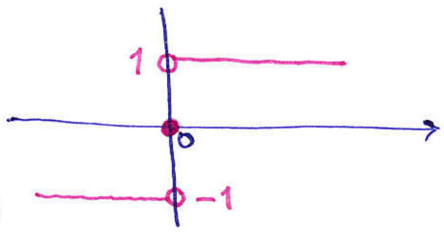
Tanım 3.1.5: $f: X \longrightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $a \in X$ olsun. f, a noktasında süreksiz olmak üzere

(i) $f(a), f(a^+), f(a^-)$ var ama $f(a) \neq f(a^-)$ veya $f(a) \neq f(a^+)$ ise f-ye a noktasında 1. çeşit süreksizlik (sonlu sıçramalı)

(ii) $f(a^+)$ veya $f(a^-)$ limitlerinden en az birisi $\mp\infty$ ise f'ye a'da 2. çeşit süreksizlik (sonsuz sıçramalı)

(iii) $f(a^+), f(a^-)$ var ve $f(a^+) = f(a^-)$ olmasına rağmen $f(a)$ yok veya $f(a) \neq \lim_{x \to a} f(x)$ ise a-ya kaldırılabilir süreksizlik noktası denir.

Örneğin; $f(x) = \mathrm{Sgn}(x)$ için $S_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ dır. $f(0^+) = 1$, $f(0^-) = -1$ old. dan 1. çeşit süreksizlik noktasıdır.



$g(x) = [\![x]\!]$ fonksiyonu $\mathbb{Z}$ kümesinde süreksiz idi. $\forall n \in \mathbb{Z}$ için $g(n) = n$, $g(n^+) = n$, $g(n^-) = n-1$ olup 1. çeşit süreksizlik noktaları $\mathbb{Z}$ tamsayılardır.

$h(x) = \dfrac{x+2}{x-2}$ için $h(2^+) = +\infty$ ve

$h(2^-) = -\infty$ olup $x=2$ noktası 2. çeşit süreksizlik noktasıdır.